Why is $ABCD_{\text{mod } 9} \equiv [A+B+C+D]_{\text{mod } 9}$?

① $ABCD = 1000 \cdot A + 100 \cdot B + 10 \cdot C + 1 \cdot D$

$$\begin{aligned} ABCD = \;& 1000 \cdot A \;+ \\ & 100 \cdot B \;+ \\ & 10 \cdot C \;+ \\ & 1 \cdot D \end{aligned}$$

② so

$$\begin{aligned} ABCD_{\text{mod } 9} = \;& 1000_{\text{mod } 9} \cdot A_{\text{mod } 9} \\ & + 100_{\text{mod } 9} \cdot B_{\text{mod } 9} \\ & + 10_{\text{mod } 9} \cdot C_{\text{mod } 9} \\ & + 1_{\text{mod } 9} \cdot D \end{aligned}$$

③ But $1000_{\text{mod } 9} \equiv 100_{\text{mod } 9} \equiv 10_{\text{mod } 9} \equiv 1$!

Thus $ABCD_{\text{mod } 9} \equiv A + B + C + D$

NOTE:

1. $ABCD_{\text{mod } 3} = [A + B + C + D]_{\text{mod } 3}$

because $100_{\text{mod } 3} \equiv 1$

2. $ABCD_{\text{mod } 2} \equiv D_{\text{mod } 2}$ because
$1000_{\text{mod } 2} \equiv 0$
$100_{\text{mod } 2} \equiv 0$
$10_{\text{mod } 2} \equiv 0$

3. $ABCD_{\text{mod } 4} \equiv [2C + D]_{\text{mod } 4}$